

Análisis de la flexión de placas mediante hiperelementos finitos de orden elevado

A. Samartín y J. Díaz del Valle

Departamento de Análisis de Estructuras

E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Santander

1. Introducción

Hasta fecha relativamente reciente, el cálculo estructural de placas con geometría y condiciones de borde arbitrarias ha constituido un problema complejo, frecuentemente inabordable sin el recurso de importantes y drásticas simplificaciones. Los métodos entonces existentes, —analíticos, semianalíticos (desarrollos en series) o numéricos (diferencias finitas)— eran incapaces o exigían un elevado grado de laboriosidad en su resolución.

Con la aparición del método de los elementos finitos (1), (MEF), la situación se modificó de un modo considerable, al existir la posibilidad de un tratamiento unificado dentro de la teoría general del análisis matricial de estructuras —del cálculo de placas— con un mínimo de aproximaciones. No obstante se comprobó que la versión en movimientos del MEF encontraba mayores dificultades en su aplicación a problemas de la clase C^1 —como son los de la flexión de placas delgadas— en comparación con los problemas C^0 —correspondientes a casos de elasticidad (tensión y deformación plana por ejemplo). Puede consultarse a este respecto al excelente libro de Zienckiewicz (2). La razón de esta dificultad hay que buscarla en el hecho de que el MEF representa un caso particular del procedimiento de Rayleigh-Ritz de minimización directa de funcionales, con funciones coordenadas constituidas por funciones —en general polinómicas— definidas en un soporte compacto (3).

Como es bien conocido, las exigencias de continuidad de estas funciones se elevan con el grado k de la clase C^k del problema funcional. Los tipos de elementos que satisfacen estas condiciones de continuidad se denominan, en la literatura, elementos conformes. Se ha comprobado (4) sin embargo, que es posible obtener, a veces de un modo muy eficiente, resultados convergentes (en el sentido de la energía) con elementos no conformes. Esta con-

vergencia, que no puede asegurarse que en estos casos sea monotónica, depende de la configuración de la malla en elementos finitos, es decir, en algunos ejemplos puede no existir convergencia. Irons (5) propuso con este objeto su bien conocida prueba del parche (patch test).

Así pues, entre los numerosos elementos finitos de flexión desarrollados hasta ahora, destacan por su interés práctico y teórico los elementos conformes, para los que importantes aspectos de la convergencia (monotonía, independencia de la malla, etc.) pueden ser asegurados sin necesidad de comprobaciones adicionales. No obstante, la tarea de construir elementos conformes de flexión no es trivial. En efecto, no es posible (6) alcanzar la conformidad en elementos mediante desarrollos polinómicos con expresión única en su interior. Existen actualmente varias técnicas de obtención de elementos conformes de flexión —utilizando sólo derivadas primeras como grados de libertad básicos (elementos simples)— entre las que merecen citarse (7): a) División del elemento en áreas o subelementos en cada uno de los cuales se define una función polinómica distinta. b) Introducción de funciones racionales correctoras. c) Reducción del orden $k = 1$ del problema C^k , mediante la relajación de la hipótesis de Kirchhoff, a $k = 0$. Esto implica la consideración de la deformación por cortante y la utilización de la integración reducida y selectiva, o bien de la hipótesis directa de Kirchhoff entre otras posibilidades. d) La consideración de hiperelementos.

Este último procedimiento de construcción de elementos finitos conformes ha sido uno de los primeros en utilizarse y, en principio, es muy simple su consideración. En esencia consiste en introducir un número mayor de incógnitas básicas por nudo que el estricto correspondiente a la función y sus primeras derivadas. El objetivo de este artículo es indicar las posibilidades prácticas que surgen del uso de una familia jerarquizada de este tipo de elementos. La discusión se restringe a los elementos triangulares, que representan formas simples y suficientemente versátiles para su aplicación a las situaciones de máxima generalidad de flexión de placas.

2. Hiperelementos triangulares

Las dos primeras técnicas —empleo de polinomios a trozos o uso de funciones racionales correctoras— citadas anteriormente para la obtención de elementos que aseguren la continuidad de la flecha (w) y de la derivada normal ($\partial w / \partial n$) a los lados entre elementos, (elementos de clase C^1), implican una discontinuidad de las curvaturas en los vértices del elemento. Por otra parte, en el caso de elementos triangulares, si se adopta como vector de incógnitas en los vértices $\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$, cuyas componentes son la flecha y sus primeras y segundas derivadas, se deducen los siguientes resultados que se refieren a la expresión de la flecha w , supuesto un polinomio de grado N en el dominio del elemento:

El número de incógnitas básicas o parámetros disponibles es igual al número de coeficientes del polinomio completo de grado N con dos variables independientes, es decir a:

$$\frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

Si el elemento es conforme, a lo largo de cada lado del elemento triangular debe existir continuidad de la flecha, w , y de su derivada normal al lado, $\partial w / \partial n$. En este caso, la expresión

polinómica de w a lo largo del lado es de grado N y estará determinada por $N + 1$ coeficientes. Análogamente, $\partial w / \partial n$ constituye un polinomio de grado $N - 1$ que exige para su completa especificación N coeficientes. Estas determinaciones implican que de la igualdad de las incógnitas básicas de cálculo existentes en los nudos situados en el lado común a dos triángulos contiguos, se deduce una expresión única e idéntica de la variación de w o $\partial w / \partial n$ según el caso.

Con respecto a la flecha, se dispone inicialmente de los tres grados de libertad $\left(w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)$ flecha, pendiente y curvatura en la dirección del lado común, que existen en cada vértice del lado. Por lo tanto el número de parámetros adicionales necesarios por lado son $N + 1 - 6 = N - 5$.

Por otra parte, con relación a la derivada normal de la flecha, se dispone, análogamente al caso anterior, en cada uno de los vértices del lado común, de los dos grados de libertad $\left(\frac{\partial w}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \right)$ pendiente normal y la derivada de ésta respecto a la dirección del lado. Al ser un polinomio de grado $N - 1$, el número de parámetros extra necesarios por lado es $N - 6$.

Así pues, el número de parámetros o grados de libertad precisos para la construcción de hiperelementos conformes, teniendo en cuenta los 18 situados en los vértices, (*) es:

$$3(N - 5 + N - 6) + 18 = 3(2N - 3)$$

Se obtiene así como resumen la tabla 1. De una inspección se deduce que no es posible formular con polinomios de grado menor que 5 estos hiperelementos, pues son necesarios 18 parámetros como mínimo (seis grados de libertad por vértice) y el polinomio cuártico completo sólo dispone de 15 coeficientes.

TABLA 1

Polinomio	N	Parámetros necesarios	Parámetros disponibles
Quíntico	5	21	21
Séxtico	6	27	28
Séptimo	7	33	36
Octavo	8	39	45
Noveno	9	45	55

Se comprueba asimismo que el hiperelemento más sencillo corresponde a la variación de la flecha como un polinomio quíntico completo (figura 1-a). La expresión de las funciones de forma ha sido obtenida en (8).

Para los restantes elementos de orden superior a éste, es necesario introducir grados de

Nota (*) Se supone que no existe dirección ni lado preferente en el triángulo siendo iguales los grados de libertad situados en cada lado del triángulo.

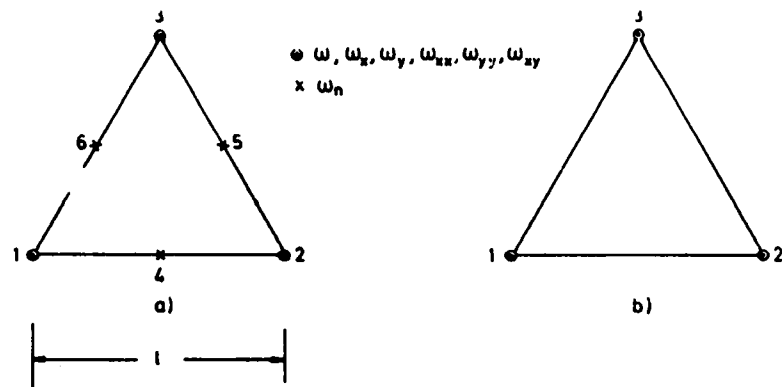
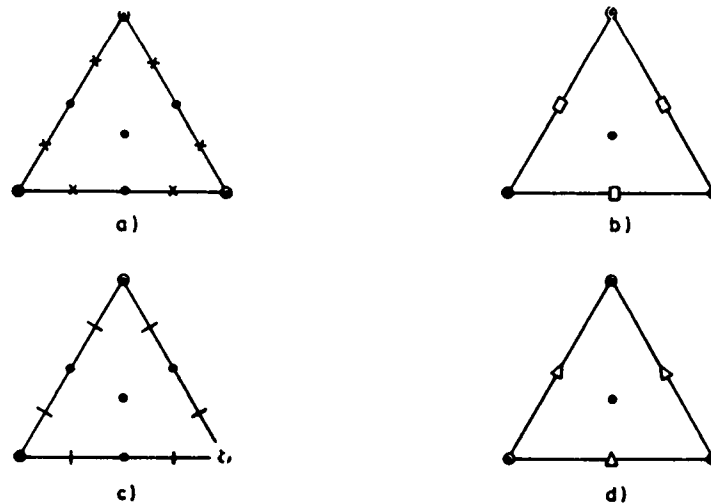
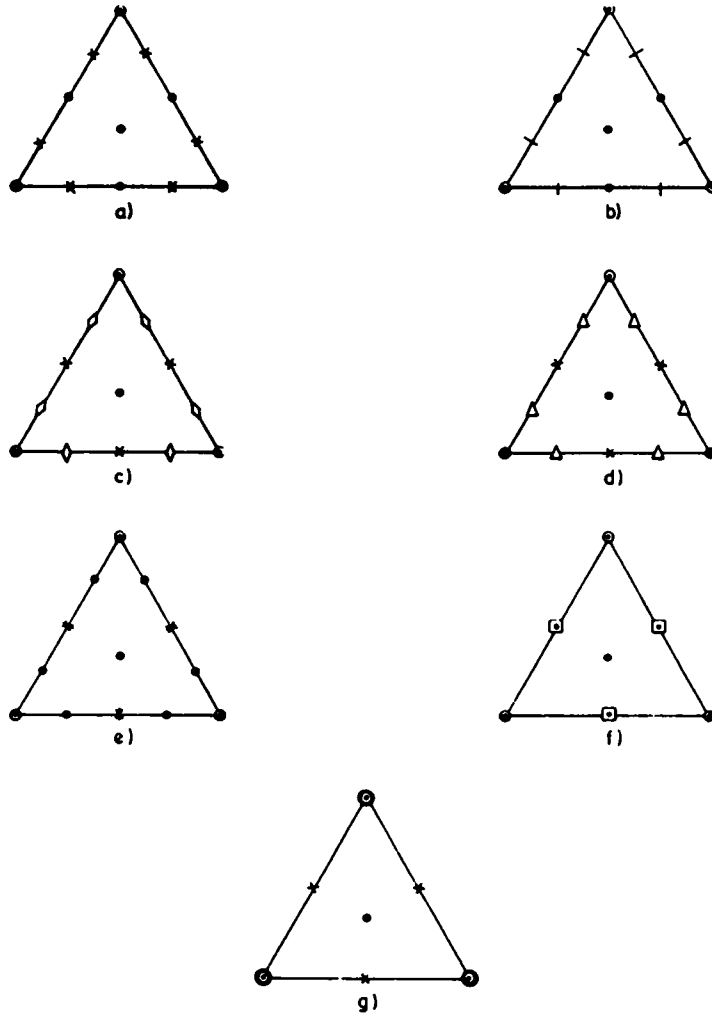


Fig. 1. Hiper elementos con aproximación polinómica de 5^o grado.



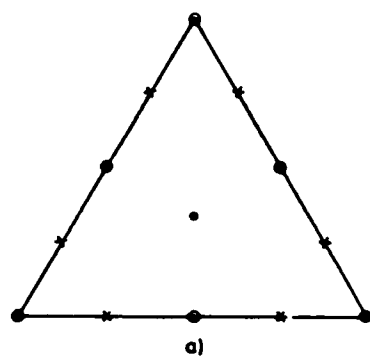
- $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{xx}, \omega_{yy}, \omega_{xy}$
- ω
- x ω_n
- | ω_{nt} (derivada respecto al lado de la pendiente normal)
- $\omega, \omega_n, \omega_{nt}$
- Δ $\omega_x, \omega_y, \omega_{nt}$

Fig. 2. Hiper elementos con aproximación polinómica de 6^o grado.

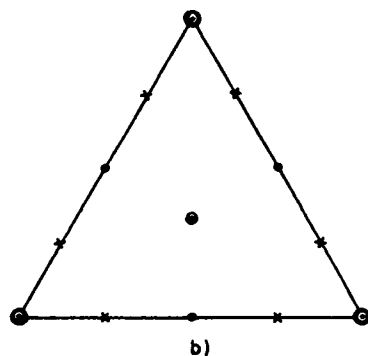


- ω
- x ω_n
- $\omega, \omega_x, \omega_y$
- ◊ ω_x, ω_y
- ω_{nt}
- Δ ω_n, ω_{nt}
- x $\omega_n, \omega_{nt}, \omega_{ntt}$
- ◻ $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{nt}, \omega_{ntt}$
- ⊙ $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{xx}, \omega_{yy}, \omega_{xy}, \omega_{xxx}, \omega_{yyy}, \omega_{xxy}, \omega_{yyx}$
- ⊖ $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{xx}, \omega_{yy}, \omega_{xy}$

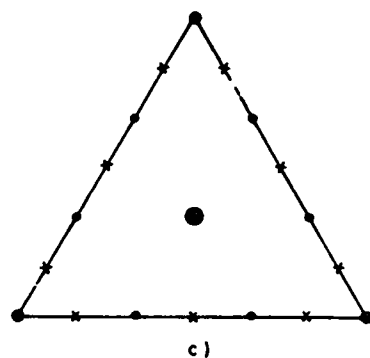
Fig. 3. Hiper elementos de 7^o orden.



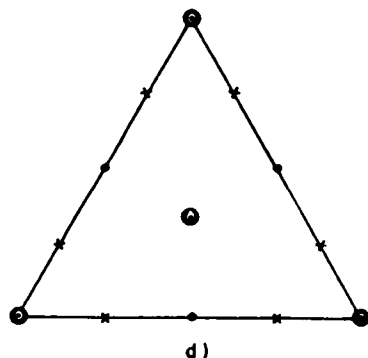
45 g d l



Hiperelementos de orden 8



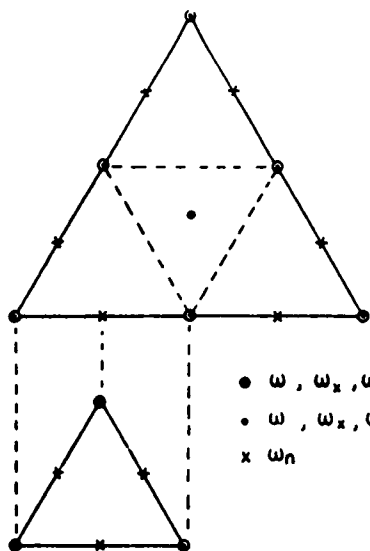
55 g d l



Hiperelementos de orden 9

- $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{xx}, \omega_{yy}, \omega_{xy}, \omega_{xxx}, \omega_{yyy}, \omega_{xxy}, \omega_{yyx}$
- $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{xx}, \omega_{yy}, \omega_{xy}$
- $\omega, \omega_x, \omega_y$
- x ω_n
- o ω

Fig. 4. Hiperelementos de orden superior.



- $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{xx}, \omega_{yy}, \omega_{xy}$
- $\omega, \omega_x, \omega_y$
- x ω_n

Fig. 5. Hiperelemento compuesto.

libertad interiores, ya que se dispone de más parámetros de los precisos. En las figs. 2, 3, 4, 5 se representan algunos de los posibles hiperelementos, correspondientes a variaciones de la flecha según polinomios de grado 6, 7, 8 y 9 respectivamente. Es interesante observar el elemento de grado 8 de la figura 5, que equivale a cuatro quinticos (figura 1) y que por otra parte, se estima conducirá a mejores resultados, al ser capaz de aproximar la función exacta de interpolación del elemento por un polinomio de grado octavo, en lugar de por cuatro polinomios (a trozos) de quinto grado.

3. Familia jerárquica de hiperelementos

Los hiperelementos triangulares comentados pueden representarse de un modo conveniente para su identificación en una librería de elementos finitos, mediante una matriz \underline{A} cuyos elementos indican el número de veces que aparece un grado de libertad, es decir:

$$\underline{A} = \{a_{ij}\}$$

de dimensión $3 \times (S(M+1) - 1)$. En donde $S(M) = 1 + \frac{M(M+1)}{2}$ y M el orden máximo de la derivada utilizada como parámetro básico en el elemento. Las columnas de la matriz representan los grados de libertad sucesivos:

$$(w, w_t, w_n, w_{tt}, w_{tn}, w_{nn}, w_{ttt}, w_{ttn}, w_{tnn}, w_{nnn}, \dots)$$

En general la columna "j" representa una derivada de orden k , siendo k el mayor número que satisface $m = M - S(k+1) \geq 0$, más concretamente, corresponde al término:

$$\frac{\partial^k w}{\partial t^{k-m} \partial n^m} \quad (*)$$

La primera y última fila de la matriz se refieren respectivamente a los vértices y nudos interiores del triángulo respectivamente. En general se supone que solo existe un nudo interior situado en el centro de gravedad del triángulo.

La fila intermedia corresponde a los nudos situados a lo largo del lado. Cada término de la fila indica el número de veces que un grado de libertad aparece en un lado.

Se comprende que se puedan generar distintos hiperelementos trasladando grados de libertad de la columna w_n a otra columna cualquiera correspondiente a sus derivadas respecto de t (w_{nt} , w_{ntt} , ...) o viceversa. Por otra parte es posible considerar los grados de libertad interiores en cualquier columna. Todos los elementos así obtenidos se suponen equivalentes a efectos de su comportamiento numérico.

El número de nudos realmente distintos, es decir, con grados de libertad no exactamente iguales, no está en principio, mediante esta representación, unívocamente definido. Se podrían disponer varias filas en la matriz —una por cada conjunto de nudos idénticos— con

(*) Nota: En los vértices y nudo interior, t y n representan los dos ejes x e y generales. En los restantes nudos constituyen la dirección del lado y su normal. En general, si en un nudo existen todas las derivadas de un cierto orden k de la flecha w , éstas pueden sustituirse por las derivadas del mismo orden pero referidas a los ejes generales x e y que normalmente son más cómodos para el cálculo.

objeto de obtener una definición completa, pero se ha conservado la indicada por considerar que los posibles distintos elementos que genera una matriz son equivalentes a efectos numéricos.

En la disposición de los nudos en cada lado se conserva la simetría. A estos efectos si existen \bar{N} nudos agrupados en las distintas clases según los grados de libertad y es N_k el número de nudos pertenecientes a la clase k , se puede escribir:

$$\bar{N} = \sum_{k=1}^K N_k$$

Se divide el lado en $\bar{N} + 1$ partes iguales y se disponen los N_k nudos simétricamente respecto al punto medio del lado. Si existen dos clases con un número impar de nudos cada una, se procurará, al menos, guardar la simetría general, para que no existan lados preferentes. Si ello no es posible, se intentará conservar la simetría rotativa, según se indican en la figura 6.

En la figura 7 se indican las representaciones matriciales de los hiperelementos de orden 5, 6, 7, 8 y 9 de las figuras 2 a 5.

Es fácil mostrar que los elementos de cada matriz, representando un hiperelemento conforme de orden N (grado del polinomio de desarrollo de la flecha), satisfacen las siguientes condiciones:

$$\sum_{i=1}^{S(M+1)-1} (3 a_{1i} + 3 a_{2i} + a_{3i}) = S(N+1) - 1 \quad (1)$$

$$\sum_{i=0}^M [2 a_{1S(i)} + a_{2S(i)}] = N + 1 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^M [2 a_{1(S(i)+1)} + a_{2(S(i)+1)}] = N \quad (3)$$

$$\text{Si } a_{1i} = 1, \text{ entonces } a_{1m} = 1, \text{ con } (s(i) + 1) < i < S(j) - 1, \\ (s(j) + 1) < m < S(j) - 1. \quad (4)$$

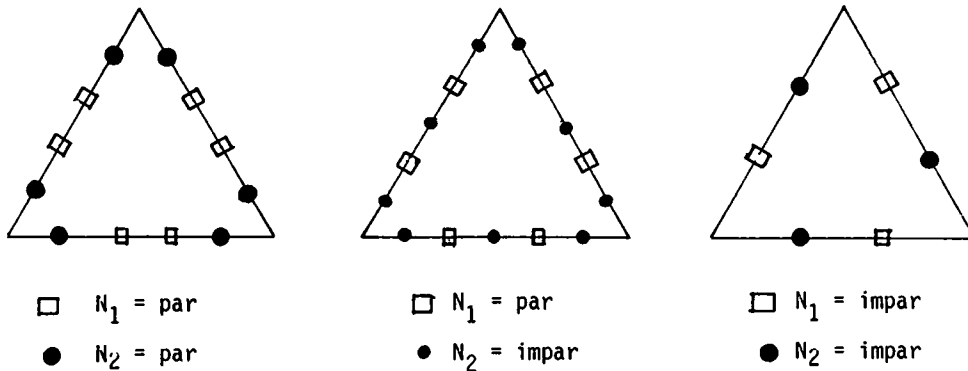


Fig. 6. Disposición de los nudos en un lado.

Fig. 1.b

Fig. 2.d

Fig. 3.d

Fig. 3.g

Fig. 4.b

Fig. 4.d

49

La extensión de estas fórmulas a triángulos con lados preferentes, es decir, con grados de libertad distintos en sus lados, es inmediata. Bastaía incrementar el número de filas intermedias a tres. El uso de este tipo de triángulos puede ser interesante en el estudio de elementos de transición, como se indicará más adelante.

4. Obtención de la familia de hiperelementos

Si se adopta como aproximación de la flecha w un polinomio completo de grado N , en el interior del elemento se tiene, en coordenadas triangulares (L_1, L_2, L_3) o naturales del triángulo:

$$w = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \alpha_{ijk} L_1^i L_2^j L_3^k \quad \text{con } i + j + k = N \quad (5)$$

El número de coeficientes α_{ijk} es $S(N+1) - 1 = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$

A partir de la matriz \underline{A} de definición del elemento, se pueden numerar los grados de libertad considerados. Los nudos situados en cada lado se dispondrán en número mínimo y de un modo simétrico como se ha comentado.

Sea \underline{U} el vector cuyas componentes representan los valores de los $S(N+1) - 1$ grados de libertad básicos del elemento. Si se considera la fórmula (5) se puede expresar este vector de incógnitas básicas \underline{U} en función de los coeficientes α_{ijk} , en la forma compacta:

$$\underline{U} = \underline{C} \underline{\alpha} \quad (6)$$

con:

$\underline{\alpha}$ vector que contiene todos los α_{ijk} anteriores

\underline{U} vector de grados de libertad en desplazamientos

\underline{C} matriz cuadrada de dimensiones $(S(N+1) - 1) \times (S(N+1) - 1)$ cuyos coeficientes son expresiones algebraicas de las características geométricas del triángulo: $a_i, b_i, c_i, h_i, L_i, \lambda_i$ y μ_i (figuras 8 y 9).

Las funciones de forma se obtienen según el proceso "standard" siguiente:

La ecuación (5) puede escribirse en la forma:

$$w = \underline{L} \underline{\alpha} \quad (7)$$

con:

\underline{L} vector cuyas componentes son los $S(N+1) - 1$ términos potenciales del polinomio completo de grado N expresado en coordenadas triangulares.

Por otra parte de la ecuación (6) se deduce:

$$\underline{\alpha} = \underline{C}^{-1} \underline{U}$$

y por lo tanto (7) se convierte en:

$$w = \underline{L} \underline{C}^{-1} \underline{U} = \underline{N} \underline{U}$$

$$L_1 = \frac{\text{Area (P23)}}{\text{Area (123)}} = \frac{A_1}{A}$$

$$a_i = x_k - x_j$$

$$b_i = y_j - y_k$$

$$c_i = y_k x_j - x_k y_j$$

$$l_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$$

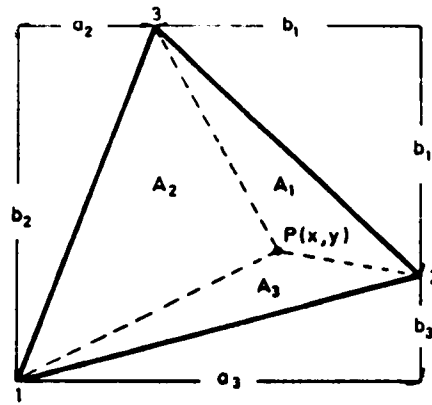
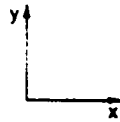


Fig. 8.

$$h_i = \frac{2A}{l_i}$$

$$s_i = a_j b_k + a_k b_j$$

$$r_i = -(a_j a_k + b_j b_k) / l_i$$

$$\lambda_i = r_i / l_i$$

$$\mu_i = 1 - \lambda_i$$

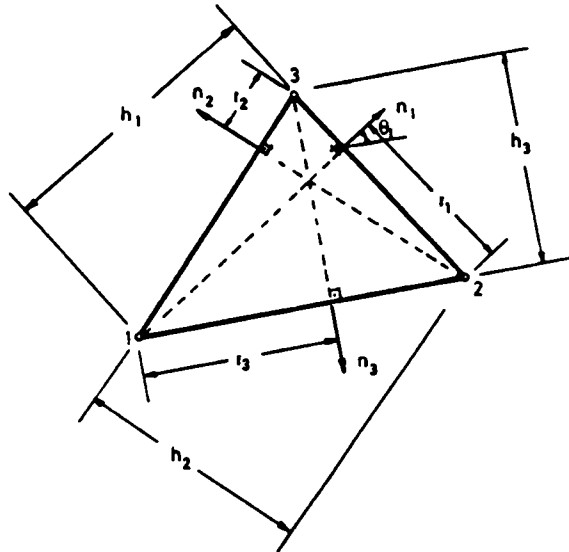


Fig. 9.

Las funciones $\underline{N} = \{N_1, N_2, \dots, N_{S(N+1)-1}\}$ se obtienen simplemente de la igualdad:

$$\underline{N} = \underline{L} \underline{C}^{-1} \quad (8)$$

La dificultad máxima que aparece en la obtención de las funciones de forma, reside en la inversión de la matriz \underline{C}^{-1} . Esta puede realizarse numéricamente, de un modo simple, para un triángulo de dimensiones específicas, o bien, en un caso genérico, es preciso llevar a cabo esta inversión algebraicamente, lo que representa una formidable tarea. En este caso, tal vez sea útil considerar la posibilidad de utilizar programas de computador que efectúen operaciones algebraicas (entre expresiones literales), lo que puede suponer una considerable ayuda en el cálculo e incluso la automatización de la matriz \underline{C}^{-1} .

Una vez deducidas las funciones de forma, la determinación de la matriz de rigidez del elemento y de las cargas equivalentes en los nudos es una tarea totalmente automática y puede ser llevada a cabo con el computador. No obstante puede representar un tiempo de cálculo importante si se evalúan las integrales exactamente. Por ello, es conveniente utilizar una integración numérica de Gauss, que permite reducir el tiempo de computación en más de un orden decimal.

Como ejemplo de aplicación de la familia de hiperelementos, se estudia en (8) el definido por la matriz:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

que se muestra en la figura 3-a con los grados de libertad ordenados.

Algunas de las funciones de forma de este elemento se representan en las figuras 10 a 18. Las restantes funciones de interpolación se deducen de las anteriores por simetría circular. En la figura 19 se muestran los autovalores y autovectores propios de la matriz de rigidez obtenida mediante integración exacta. Se comprueban los tres movimientos de sólido rígido correspondientes a los autovalores nulos.

De forma semejante se ha procedido en (8) con el hiperelemento de la figura (3-g) cuya matriz de definición es:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Algunas de las funciones de forma de este elemento se muestran en las figuras 20-26, siendo inmediata la deducción de las restantes, como se indicó anteriormente. El análisis espectral de su matriz de rigidez, calculada mediante integración exacta, se indica en la figura 27.

5. Familias derivadas de hiperelementos

Como es conocido, los grados de libertad interiores se pueden eliminar, previamente al ensamblaje de la matriz de rigidez del elemento, mediante la técnica de condensación estática. De esta forma, se obtienen hiperelementos con grados de libertad únicamente en su contorno.

Existe otra posibilidad de eliminación de grados de libertad, consistente en la reducción del orden de la curva de contacto entre elementos.

Se consigue esta reducción del grado imponiendo condiciones entre los diferentes grados de libertad, que permiten expresar unos g.d.l. subordinados en función de otros principales. Estas condiciones posteriormente pueden ser utilizadas para obtener unas nuevas funciones de forma, correspondientes a los g.d.l. principales.

Por ejemplo, el hiperelemento quíntico de la figura 1-a puede reducirse al hiperelemento quíntico más sencillo de la figura 1-b, si se fuerza a que la derivada normal ($\partial w / \partial n$)

varíe a lo largo de cada lado según una cúbica, en lugar de una cuártica. De este modo, se pueden expresar los g.d.l. en los puntos medios de los lados como combinación lineal de los restantes g.d.l.

Así, se escribe:

$$(w_n)_4 = \frac{1}{2} \{(w_n)_1 + (w_n)_2\} + \frac{\ell_1}{8} \{(w_{tn})_1 - (w_{tn})_2\} \quad (9)$$

y análogamente con $(w_n)_5$ y $(w_n)_6$.

Si se procede con el hiperelemento de 7° orden ya comentado de la figura 3-a se puede reducir a la situación de la figura 28; basta imponer la condición de que la pendiente normal se reduzca de una curva de 6° grado a otra de cuarto. Para ello se debe cumplir, para los grados de libertad de los nudos 7 y 8:

$$(w_n)_7 = \frac{1}{128} \{72 (w_n)_1 - 16 (w_n)_2 + 72 (w_n)_4 + 9\ell_3 (w_{nt})_1 + 3\ell_3 (w_{nt})_2\} \quad (10)$$

$$(w_n)_8 = \frac{1}{128} \{-16 (w_n)_1 + 72 (w_n)_2 + 72 (w_n)_4 - 3\ell_3 (w_{nt})_1 - 9\ell_3 (w_{nt})_2\}$$

y análogas relaciones para los nudos 9, 10, 11 y 12.

El hiperelemento de la figura 3-g puede ser transformado en el más simple de la figura 29, mediante la utilización de las relaciones:

$$(w_n)_4 = \frac{(w_n)_1 + (w_n)_2}{2} + \frac{5}{32} \ell_3 \{(w_{nt})_1 - (w_{nt})_2\} + \frac{\ell_3^2}{64} \{(w_{ntt})_1 + (w_{ntt})_2\} \quad (11)$$

y análogas para los nudos 5 y 6. Estas ecuaciones se deducen al imponer variación quíntica para la derivada normal de la flecha a lo largo de los lados.

Las matrices de rigidez de los hiperelementos derivados, obtenidos mediante esta reducción, se deducen a partir de las nuevas funciones de forma, según el procedimiento "standard". Se comprende ahora que el desarrollo supuesto para la flecha ya no constituye un polinomio completo de orden N (5 y 7 en los ejemplos), ya que existe entre sus coeficientes un conjunto de relaciones lineales. Por lo tanto, si bien el elemento continúa siendo conforme, su orden de convergencia disminuye de N al orden máximo del polinomio completo contenido en el desarrollo de la flecha.

6. Resultados numéricos

Si bien no existe una importante experiencia en el uso sistemático de la familia de hiperelementos descritos, sí se conoce en detalle el comportamiento numérico de los dos hiperelementos de orden séptimo que se han comentado. Se han estudiado ambos elementos en numerosos casos, con objeto de comprobar la bondad de su actuación con relación a distintas variables: integración exacta y numérica (*) (número de puntos de integración), influencia de las condiciones de contorno, relación entre lados y oblicuidad de los elementos, tipos de cargas, etc. La extensiva experimentación numérica llevada a cabo permite asegurar

(*) Como las fórmulas existentes de integración numérica de Gauss, referidas a triángulos, se encuentran limitadas a órdenes bajos O (h^7), se ha ensayado la técnica de subdivisión del triángulo en cuatro de igual área y extender la integración numérica a cada uno de los subtriángulos.

que con estos hiperelementos se alcanza una exactitud de todos los resultados del cálculo de placas, excelente incluso con discretizaciones muy groseras.

A efectos ilustrativos se comentan los resultados obtenidos en el cálculo, mediante la utilización del elemento de la figura 3-a, en un ejemplo típico: placa cuadrada de lado a , simplemente apoyada en su contorno, bajo la actuación de una carga uniforme de intensidad q . (Se supone un coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$). Se consideran las tres discretizaciones de la figura 30.

Los resultados obtenidos se comparan con los exactos dados por Timoshenko (4) en la tabla 2.

TABLA 2

	Malla mínima	Malla 1 x 1	Malla 2 x 2	Exacto	
Flecha en el centro	0,0040705	0,0040624	0,0040624	0,004062	$x \frac{q a^4}{D}$
Momentos centrales $M_x = M_y$	—	0,048329	0,047901	0,0479	$x q a^2$
Reacciones de esquina	0,064	0,06484	0,06493	0,065	$x q a^2$
Cortantes en el centro del lado	—	-0,34377	-0,3388	-0,338	$x q a$
Reacciones de Kirchhoff en el centro del lado	—	-0,42548	-0,4228	-0,420	$x q a$

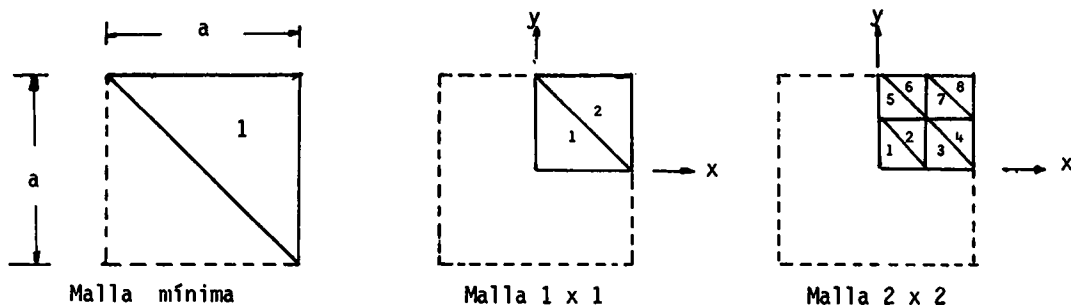


Fig. 30.

Se observará que para la discretización de la malla 2 x 2 se obtiene un ajuste absoluto con los valores exactos, siendo de destacar la aproximación obtenida para los esfuerzos cortantes, difícil de lograr utilizando otros tipos de elementos. Como se comprende, no existe en los resultados dispersión alrededor de un nudo a excepción de los cortantes, si bien, entonces, la dispersión es pequeña, lo que indica la bondad del elemento. Se ha procedido en este caso a la técnica de promedio alrededor de cada nudo.

Los resultados anteriores se han obtenido con la matriz de rigidez evaluada mediante integración exacta. La influencia del número de puntos de Gauss en la integración numérica se resume en la tabla 3. La integración ampliada se refiere en dicha tabla a la subdivisión del elemento en cuatro triángulos de igual área, uniendo los puntos medios de sus lados.

Por último, y con objeto de comprobar no sólo la velocidad de convergencia del hiperelemento, sino su eficacia computacional, se representa en las figuras 31 y 32 un análisis comparativo del error que se obtiene en función del número de grados de libertad utilizados en el cálculo, con respecto a otros elementos finitos. Los resultados comparados son en desplazamientos y momentos flectores. Los valores de esfuerzos cortantes no suelen ser representados en la literatura, ya que normalmente se obtienen errores muy elevados, por ello en la figura 33 sólo se representa el porcentaje de error y la dispersión de éstos y los valores de las reacciones.

7. Aplicación de las familias de hiperelementos

En el cálculo mediante el MEF existen dos posibilidades de refinamiento: a) una mayor discretización de la malla. b) Incremento del orden del polinomio de interpolación del elemento.

Esta segunda posibilidad todavía no ha sido, en nuestra opinión, totalmente explotada en la práctica y presenta indudables ventajas computacionales. En efecto, es posible, conservando una configuración inicial de la malla en elementos finitos, utilizar polinomios de interpolación de órdenes sucesivamente crecientes, bien en toda o parte de la estructura. De esta forma, si los elementos son conformes —como las familias aquí comentadas—, los resultados que se obtienen son monotónicamente convergentes. Por otra parte, en comparación con el refinamiento de la malla, que implica saltos importantes del número de grados de libertad, el uso de familias jerárquicas presenta la ventaja de un más suave incremento de este número de g.d.l.

Del estudio comparativo con otros elementos, se ha constatado, en el apartado anterior, que el incremento del orden del polinomio de interpolación es computacionalmente más eficiente —medido en exactitud de todos los resultados— que el mero refinamiento de la malla de elementos simples. Evidentemente, en las situaciones de estructuras con contorno irregular, se hace preciso captar estas características geométricas mediante un número elevado de elementos. A este respecto, la conjunción de elementos simples —como el LCCT-12— situados en el contorno con pocos hiperelementos en la zona central de la estructura parece constituir una disposición ideal. Naturalmente, en este caso la librería de hiperelementos jerarquizados debería incluir elementos de transición, que pueden ser obtenidos directamente o bien de los existentes mediante reducción de g.d.l. en uno o dos de los lados del hiperelemento triangular.

Finalmente, existen situaciones en donde el conocimiento adecuado de resultados que implican un elevado orden de derivación de la flecha —como los esfuerzos cortantes— exigen necesariamente el uso de hiperelementos de orden superior.

La contrapartida a la utilización de hiperelementos reside en el elevado grado de continuidad que exige a la solución, particularmente en estructuras con saltos bruscos de sus características elásticas o espesor. Existen varias técnicas para obviar estos inconvenientes (8) por lo que no se repiten aquí. Conviene, para terminar, tener presente la importancia que en la bondad de los resultados tiene el modo de introducción de las condiciones de contorno (g.d.l. esenciales y naturales), siendo preciso adquirir un cierto grado de conocimiento con este tipo de familias de hiperelementos.

TABLA 3
Placa apoyada sometida a carga uniforme q
Influencia de los puntos de integración numérica

Precisión	Puntos de integr.	$\times qa^4/D$ Flecha en centro ω_1	$\times qa^2$ Momentos centrales $(M_x)_1 = (M_y)_1$	$\times qa^2$ Reacción de esquina $R = 2 (M_{xy})_9$	$\times qa$ Cortante en el punto medio del lado $(Q_x)_3$	$\times qa$ Reacción en el punto medio del lado $(V_x)_3$
0 (h ⁵)	9	0,004280	0,01829	0,0796	-4,3292*	-4,7307*
0 (h ⁶)	12	0,004062	0,04607	0,0654	-0,3298*	-0,4039*
0 (h ⁷)	13	0,004062	0,04537	0,0634	-0,1864*	-0,2538*
0 (h ⁵) ampliada	36	0,004062	0,04769	0,0653	-0,3707	-0,4575
0 (h ⁶) ampliada	48	0,004062	0,04790	0,0649	-0,3406	-0,4228
0 (h ⁷) ampliada	52	0,004062	0,04790	0,0649	-0,3407	-0,4228
Rutina EXACT	Integr. exac.	0,004062	0,04790	0,0649	-0,3406	-0,4228
	Timoshenko	0,004062	0,0479	0,065	-0,338	-0,420

8. Conclusiones

La importancia del refinamiento en el MEF mediante el incremento de los órdenes de los polinomios que constituyen las funciones de forma, se resalta en comparación con el procedimiento habitual de subdivisión de la malla conservando el tipo de elementos. De esta forma, familias de superelementos pueden ser generadas con elementos de transición y conservadas en una librería de elementos de un programa general de elementos finitos. Se indican aquí, por su facilidad de obtención, algunos hiperelementos insertos en una posible familia jerárquica. Se comprueba, de la extensa experimentación numérica, la bondad y eficacia computacional que se consigue. En particular, los resultados que exigen un elevado grado de derivación, con sus inherentes ruidos numéricos, deben ser obtenidos mediante este tipo de superelementos si un cierto grado de exactitud se exige en el cálculo.

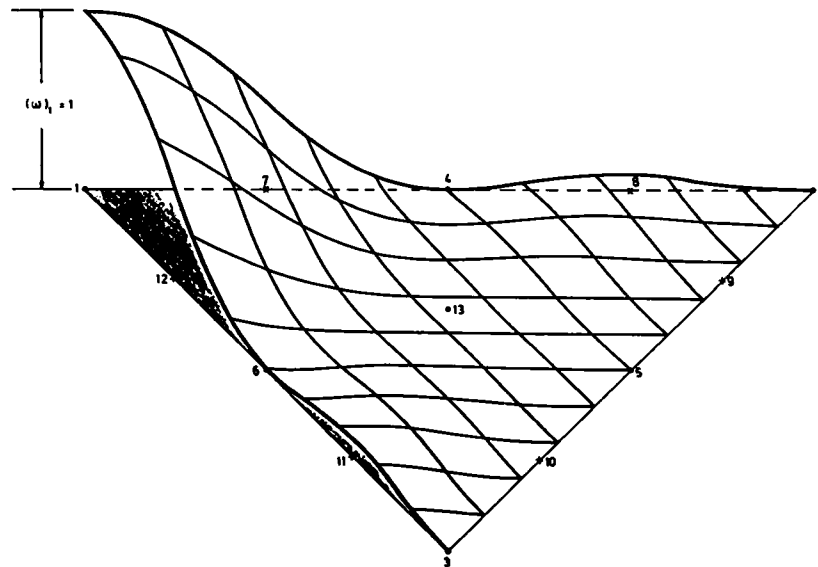
La influencia del número de puntos de integración numérica de la matriz de rigidez del elemento en el tiempo de ordenador es extraordinaria. De ahí se hace preciso obtener una extensión de las fórmulas actualmente publicadas. De esta forma se podría evaluar la integral directamente, sin necesidad de requerir una subdivisión del dominio triangular de integración, lo que, si bien eleva la exactitud, no incrementa el grado de aproximación, exigiendo un número menor de puntos.

Finalmente, las zonas regulares de la estructura —o repetitivas— podrían ser modeladas con un elemento único, idéntico en geometría, lo que permitiría una reducción adicional del cálculo, al no exigir más que la evaluación de la matriz de rigidez de este elemento único.

Las ideas anteriores son aplicables en principio a todo tipo de superelementos: elementos con funciones de interpolación de la flecha, polinomios completos de orden elevado— y no necesariamente a los hiperelementos. Por lo tanto cabe esperar la extensión de las anteriores conclusiones a estos superelementos.

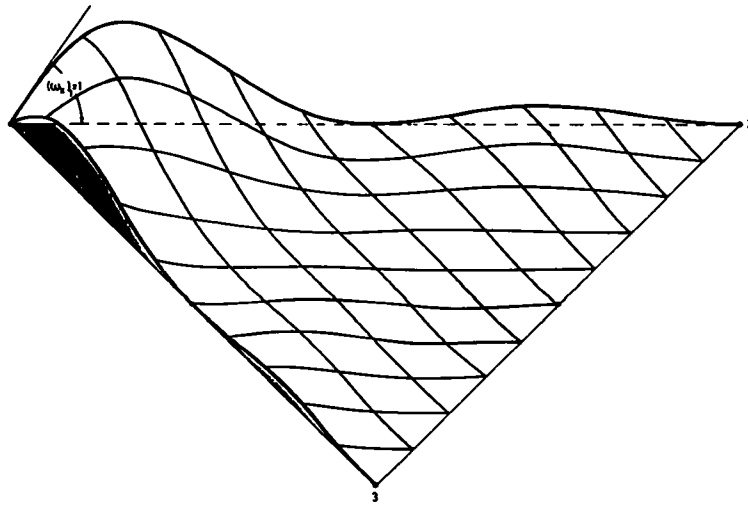
9. Referencias

1. M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin and L.J. Topp, "Stiffness and deflection analysis of complex structures". J. Aero. Sci. 23,805-24, 1956.
2. O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw Hill C., Londres 1979.
3. T.H.H. Pian and P. Tong "Basis of finite element methods for solid continua" Int. J. Num. Meth. Eng. 1,3-28, 1969.
4. S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill 2nd.ed.1959.
5. B.M. Irons, "The patch test for engineers", Conf. Atlas Computing Center, March 1974, Harwell U. J.
6. B.M. Irons and J.K. Draper, "Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending" J.A.I.A.A., 3, 5, 1965.
7. A. Samartín, "Aplicación del Método de los Elementos Finitos al Análisis Estructural de Tableros de Puentes", Discurso de Inauguración del curso académico 1979-80, Universidad de Santander.
8. J. Díaz del Valle y A. Samartín, "Una contribución al estudio de hiperelementos finitos en flexión de placas". Departamento de Análisis de Estructuras de la E.T.S. de Ingenieros de Caminos de Santander, 1980.



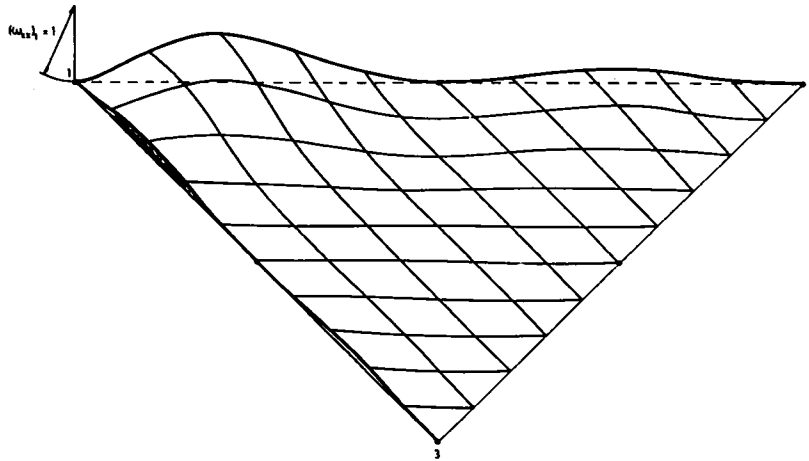
$$\begin{aligned}
 N_1 = & L_1^7 + 7L_1^6(L_2 + L_3) + 21(L_2 + L_3)^2 + 114(\lambda_2 L_3^3 + \mu_3 L_2^3)L_1^2 L_2 L_3 - \\
 & - L_1^4 \{ 67(L_2^3 + L_3^3) + L_2 L_3 [201(\mu_2 L_3 + \lambda_1 L_2) - 105(\lambda_2 L_3 + \mu_1 L_2)] \} + \\
 & + L_1^3 \{ 38(L_2^3 + L_3^3) + L_2 L_3 [152(\mu_2 L_3 + \lambda_3 L_2^2) - 268(\lambda_2 L_3 + \mu_3 L_2^2)] \} + \\
 & + L_1^2 L_3^3 \{ [192(\mu_2^2 + \lambda_3) - 5]L_1 + (192\mu_1 - 161)L_2 + (192\lambda_2 - 161)L_3 \}
 \end{aligned}$$

Fig. 10. Función de forma asociada al grado de libertad $U_1 \equiv (\omega)_1$



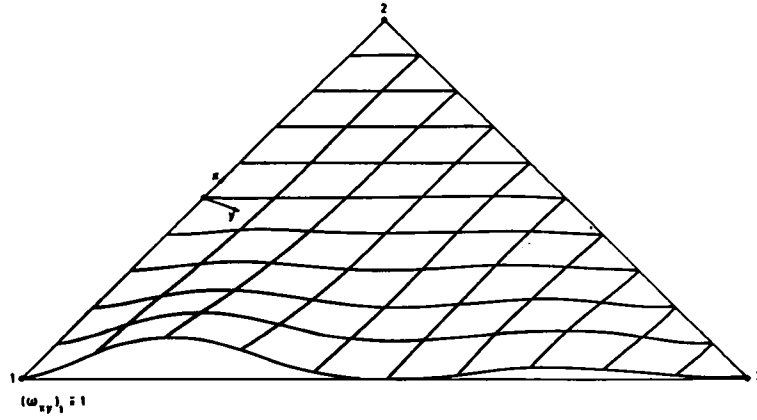
$$\begin{aligned}
 N_2 = & L_1^5(a_1L_2 - a_2L_3)[L_1 + 6(L_2 + L_3)] + 15L_1^4(a_2L_3^2 - a_3L_2^2) + 8L_1^3(a_3L_2^4 - a_2L_3^4) + \\
 & + \frac{1}{9} L_1^4L_2L_3[(364a_2 + 270a_3 - 311\lambda_1a_1)L_2 - (364a_1 + 270a_2 - 311\mu_2a_2)L_3] - \\
 & - \frac{1}{9} L_1^3L_2L_3[(394a_2 + 540a_3 - 434\lambda_3a_1)L_2^2 - (394a_1 + 540a_2 - 434\mu_2a_2)L_3^2] + \\
 & + \frac{1}{9} L_1^2L_2L_3[(216a_3 + 93a_2 - 123\lambda_3a_1)L_2^3 - (216a_2 + 93a_3 - 123\mu_2a_2)L_3^3] + \\
 & + \frac{1}{9} L_1^2L_2^2L_3^2\{172(a_3 - a_2)L_1 + (208a_2 + 99a_3)L_2 - (208a_3 + 99a_2)L_3 + \\
 & + 188[\lambda_1a_1(L_1 - L_2) - \mu_2a_2(L_1 - L_3)]\}
 \end{aligned}$$

Fig. 11. Función de forma asociada al grado de libertad $U_2 \equiv (\omega_x)_1$



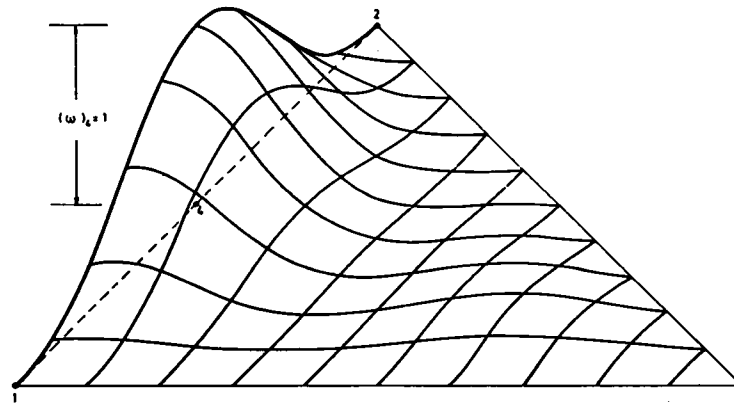
$$\begin{aligned}
 N_4 = & \frac{1}{2} L_1^5(a_1L_2 - a_2L_3)^2 - L_1^4(a_2^2L_3^2 + a_3^2L_2^2) + \frac{1}{2} L_1^3(a_2^2L_3^3 + a_3^2L_2^3) + \\
 & + \frac{1}{6} L_1^4L_2L_3[a_3(15a_3 + 26a_2 - 7\lambda_3a_1)L_2 + a_2(15a_2 + 26a_3 - 7\mu_2a_2)L_3] + \\
 & - \frac{1}{3} L_1^3L_2L_3[a_3(12a_3 + 13a_2 - 5\lambda_3a_1)L_2^2 + a_2(12a_2 + 13a_3 - 5\mu_2a_2)L_3^2] - \\
 & - \frac{1}{3} L_1^2L_2^2L_3^2[a_3^2(3 - 2\lambda_3)(L_1 - L_2) + a_2^2(3 - 2\mu_2)(L_1 - L_3) + a_2a_3(17L_1 - 7L_2 - 7L_3)] + \\
 & + \frac{1}{2} L_1^2L_2L_3[a_3^2(3 - \lambda_3)L_2^2 + a_2^2(3 - \mu_2)L_3^2 + 2a_2a_3(L_2^2 + L_3^2)]
 \end{aligned}$$

Fig. 12. Función de forma asociada al grado de libertad $U_4 \equiv (\omega_{xx})_1$



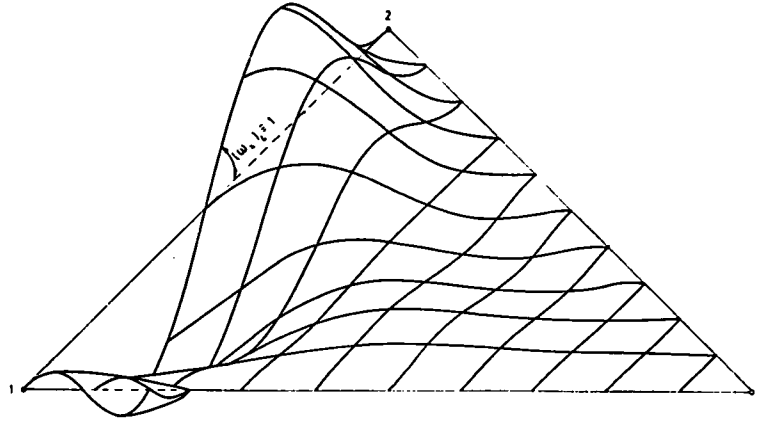
$$\begin{aligned}
 N_6 = & -L_1^5(a_1b_1L_2^2 - s_1L_2L_3 + a_2b_2L_3^2) + 2L_1^4(a_1b_3L_2^3 + a_2b_2L_3^3) - L_1^3(a_3b_3L_2^4 + a_2b_2L_3^4) - \\
 & -\frac{1}{3}L_1^4L_2L_3[(15a_3b_3 + 13s_1 - 7\lambda_3a_3b_3)L_2 + (15a_2b_2 + 13s_1 - 7\mu_2a_2b_2)L_3] + \\
 & +\frac{1}{3}L_1^3L_2L_3[(24a_3b_3 + 13s_1 - 10\lambda_3a_3b_3)L_2^2 + (24a_2b_2 + 13s_1 - 10\mu_2a_2b_2)L_3^2] + \\
 & +\frac{1}{3}L_1^2L_2^2L_3^2[2a_3b_3(3 - 2\lambda_3)(L_1 - L_2) + 2a_2b_2(3 - 2\mu_2)(L_1 - L_3) + s_1(17L_1 - 7L_2 - 7L_3)] - \\
 & -L_1^2L_2L_3[a_3b_3(3 - \lambda_3)L_2^3 + a_2b_2(3 - \mu_2)L_3^3 + s_1(L_2^3 + L_3^3)]
 \end{aligned}$$

Fig. 13. Función de forma asociada al grado de libertad $U_6 \equiv (\omega_{xy})_1$



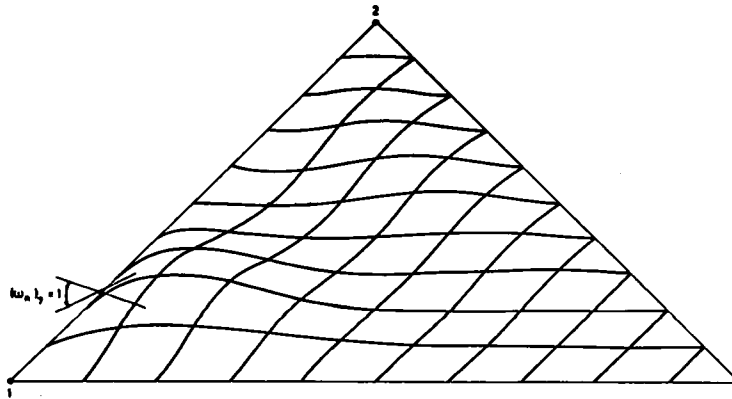
$$\begin{aligned}
 N_{19} = & 64L_1^2L_2^2\{ (L_1 + L_2)L_1L_2 + (3\mu_3L_2^2 + 4L_1L_2 + 3\lambda_3L_1^2)L_3 - \\
 & - [(7 + 6\lambda_3)L_1 + (7 + 6\mu_3)L_2 - 11L_3] L_3^2 \}
 \end{aligned}$$

Fig. 14. Función de forma asociada al grado de libertad $U_{19} \equiv (\omega)_4$



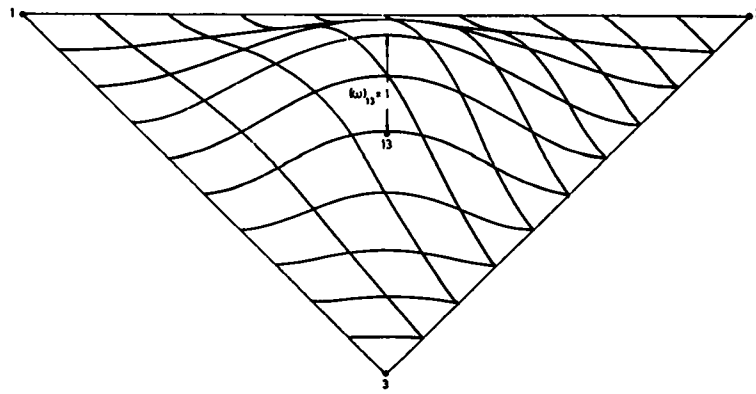
$$N_{20} = 16L_1^2 L_2^2 \{ 2a_3(L_2 - L_1)L_1L_2 + L_3^2 [(4a_2 + 10a_3)L_1 + (4a_2 - 6a_3)L_2 - (4a_2 + 2a_3)L_3] + \\ + L_3 [3(a_3 + a_2 - \mu_3 a_3)L_2^2 - 2(a_3 + 3\mu_3 a_3 + 5a_2)L_1L_2 + 3(a_2 + \mu_3 a_3 - a_3)L_1^2] \}$$

Fig. 15. Función de forma asociada al grado de libertad $U_{20} \equiv (\omega_x)_4$



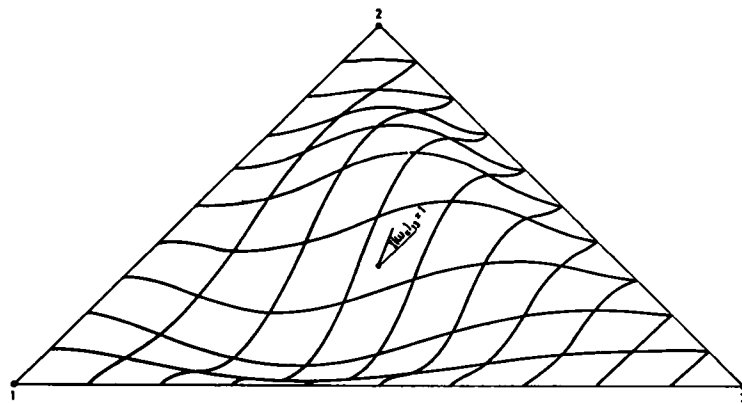
$$N_{28} = \frac{256}{9} h_3 \cdot L_1^2 L_2^2 L_3 [(3L_1^2 - 4L_1L_2 + L_2^2) + 2L_3(L_2 - L_1)]$$

Fig. 16. Función de forma asociada al grado de libertad $U_{28} \equiv (\omega_n)_7$



$$N_{3,4} = 3^6 L_1^2 L_2^2 L_3^2$$

Fig. 17. Función de forma asociada al grado de libertad $U_{34} \equiv (\omega)_{13}$



$$N_{3,5} = 3^5 L_1^2 L_2^2 L_3^2 [(a_2 - a_3)L_1 + (a_3 - a_1)L_2 + (a_1 - a_2)L_3]$$

Fig. 18. Función de forma asociada al grado de libertad $U_{35} \equiv (\omega_x)_{13}$

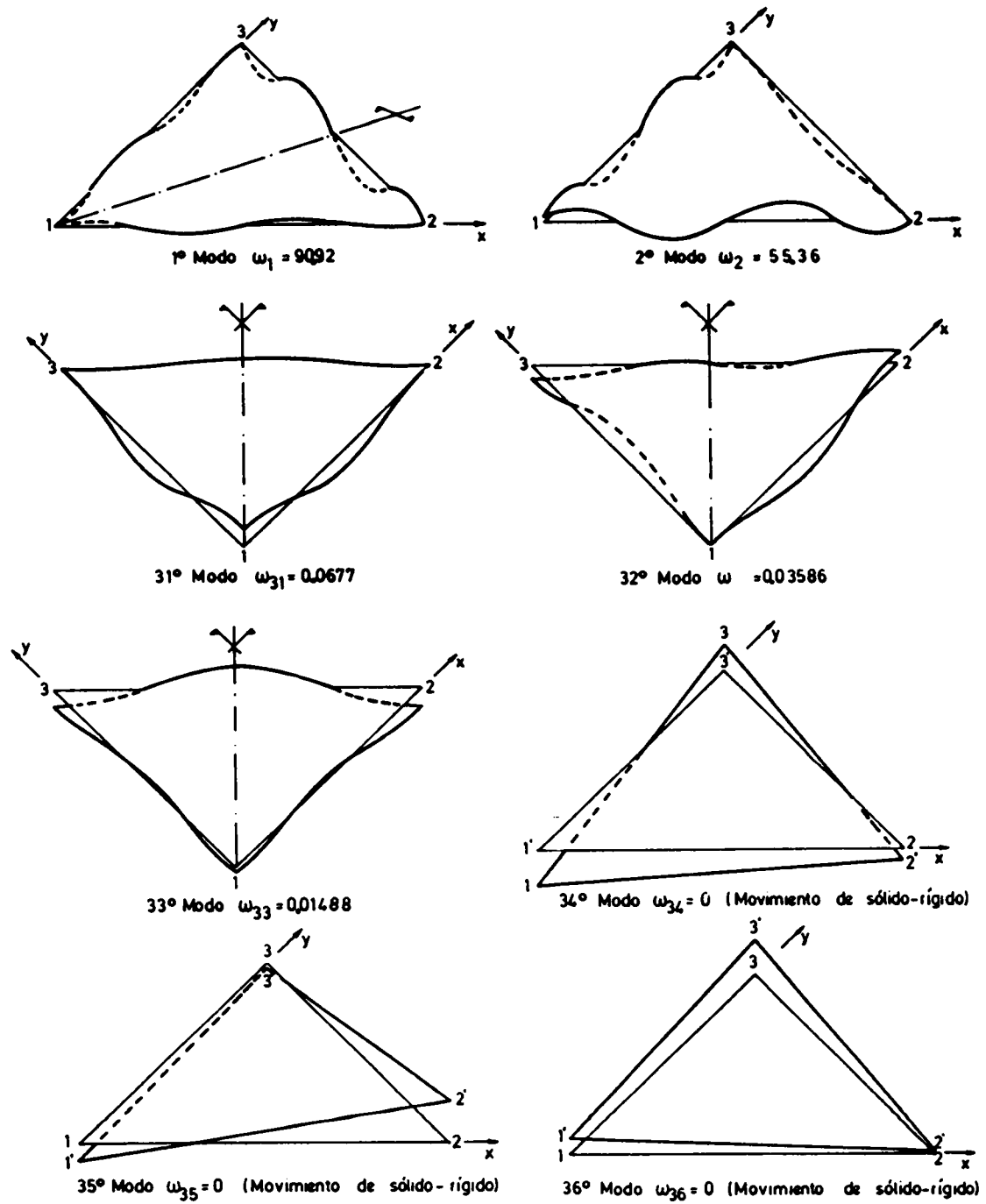
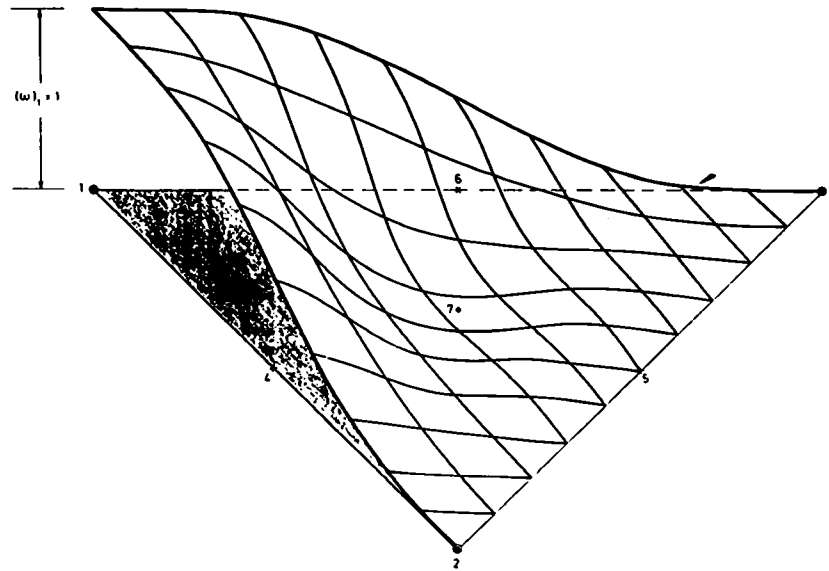


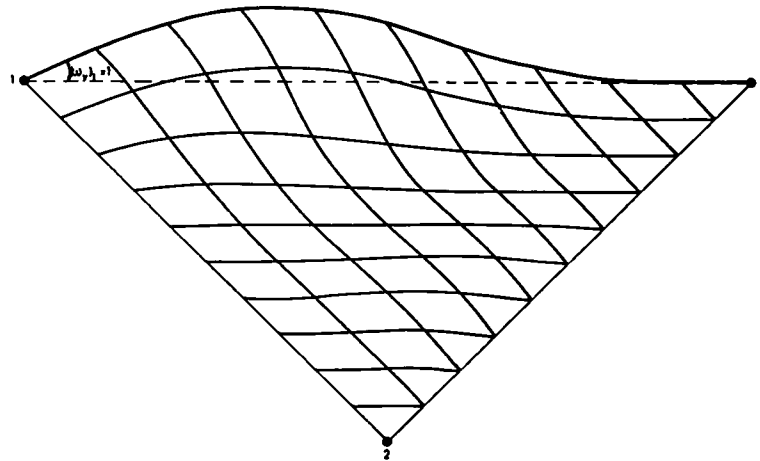
Fig. 19. Vectores propios de la matriz de rigidez del Hiper elemento tipo I.



$$N_1 = L_1^3 \left[L_1^4 + 7L_1^3(L_2 + L_3) + 21L_1^2(L_2 + L_3)^2 + 35L_1(L_2 + L_3)^3 + 140L_2L_3(\mu_3L_2^2 + \lambda_2L_3^2) \right] -$$

$$- L_1^2L_2^2L_3^2 \{ [873 + 140(\lambda_2' + \mu_3)] L_1 + [140(\mu_3 - \lambda_2) - 247] L_2 + [140(\lambda_2 - \mu_3) - 247] L_3 \}$$

Fig. 20. Función de forma asociada al grado de libertad $U_1 = (\omega)_1$



$$N_1 = L_1^6 (b_2L_1 - b_3L_2) + 6L_1^5 [b_2L_1^2 + (b_1 - b_2)L_2L_1 - b_3L_2^2] +$$

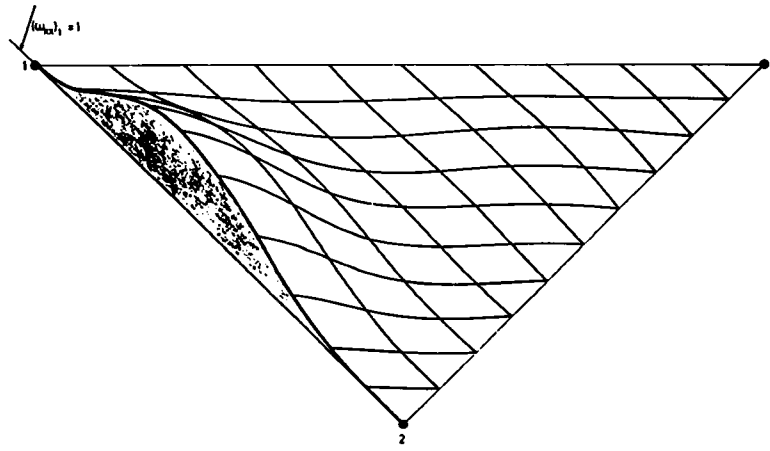
$$+ 15L_1^4 \{ L_2L_3 [(2b_2 - b_3)L_3 - (2b_3 - b_2)L_2] + (b_2L_3^3 - b_3L_2^3) \} +$$

$$+ L_1^3L_2L_3 [(22b_1 - 38\mu_3b_3)L_2^2 - (22b_1 - 38\lambda_2b_2)L_3^2] -$$

$$- L_1^2L_2^2L_3^2 \{ [160(b_2 + b_3) + 38(\lambda_2b_2 - \mu_3b_1)] L_1 + 124(b_3L_3 - b_2L_2) +$$

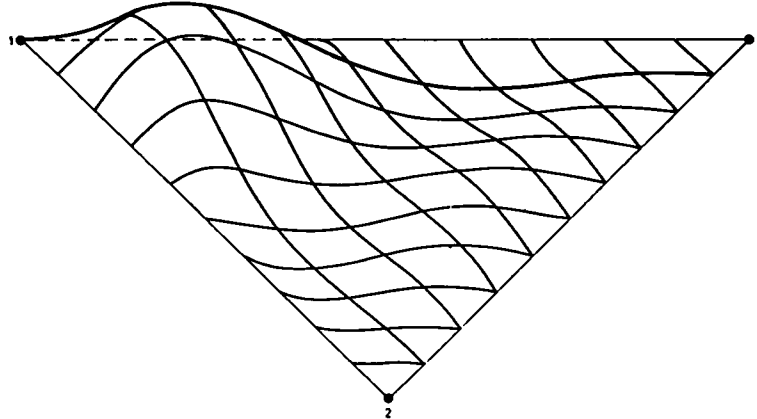
$$+ 37(b_2L_3 - b_3L_2) + 38(\lambda_2b_2 + \mu_3b_3)(L_3 - L_2) \}$$

Fig. 21. Función de forma asociada al grado de libertad $U_3 = (\omega_y)_1$



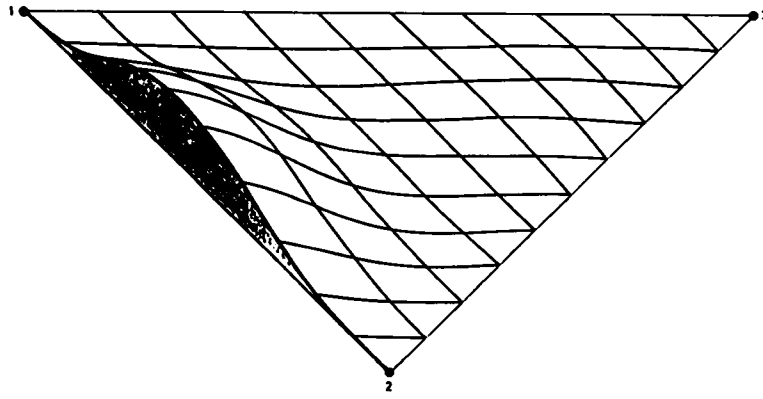
$$\begin{aligned}
 N_{u_4} = & \frac{1}{2} L_1^5 (a_1 L_2 - a_2 L_3)^2 + \frac{5}{2} L_1^4 (a_3^2 L_2^3 + a_2^2 L_3^3) + \\
 & + \frac{5}{2} L_1^4 L_2 L_3 [a_1 (a_3 - 2a_2) L_2 + a_2 (a_2 - 2a_3) L_3] + \\
 & + 2L_1^3 L_2 L_3 [a_3 (3a_2 + 3a_3 + 2\mu_3 a_3) L_2^2 + a_2 (3a_3 + 3a_2 + 2\lambda_2 a_2) L_3^2] - \\
 & - \frac{1}{2} L_1^2 L_2^2 L_3^2 \{ [35(a_2^2 + a_3^2) - 22a_2 a_3 + 8(\mu_3 a_3^2 + \lambda_2 a_2^2)] L_1 + \\
 & + 8(\lambda_2 a_2^2 - \mu_3 a_3^2)(L_3 - L_2) + (17a_3^2 - 29a_2^2 + 12a_2 a_3) L_2 + (17a_2^2 - 29a_3^2 + 12a_2 a_3) L_3 \}
 \end{aligned}$$

Fig. 22. Función de forma asociada al grado de libertad $U_4 = (\omega_{xx})_1$



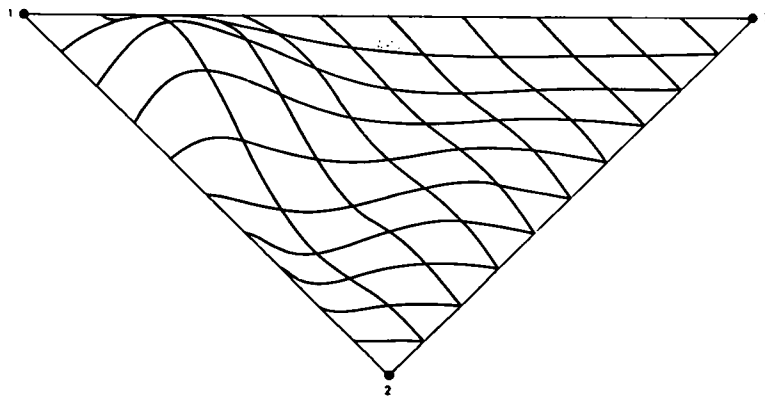
$$\begin{aligned}
 N_{u_6} = & - L_1^5 (a_3 b_1 L_2^2 - s_1 L_2 L_3 + a_2 b_2 L_3^2) - 5L_1^4 (a_3 b_3 L_2^2 + a_2 b_2 L_3^2) - \\
 & - 5L_1^4 L_2 L_3 [(a_3 b_3 - s_1) L_2 + (a_2 b_2 - s_1) L_3] - \\
 & - 2L_1^3 L_2 L_3 [(3s_1 + 6a_3 b_3 + 4\mu_3 a_3 b_3) L_2^2 + (3s_1 + 6a_2 b_2 + 4\lambda_2 a_2 b_2) L_3^2] + \\
 & + L_1^2 L_2^2 L_3^2 \{ [35(a_2 b_2 + a_3 b_3) - 11s_1 + 8(\mu_3 a_3 b_3 + \lambda_2 a_2 b_2)] L_1 + \\
 & + 8(\lambda_2 a_2 b_2 - \mu_3 a_3 b_3)(L_3 - L_2) + (17a_3 b_3 - 29a_2 b_2 + 6s_1) L_2 + (17a_2 b_2 - 29a_3 b_3 + 6s_1) L_3 \}
 \end{aligned}$$

Fig. 23. Función de forma asociada al grado de libertad $U_6 = (\omega_{xy})_1$



$$\begin{aligned}
 N_7 = & \frac{1}{6} L_1^4 (a_1 L_2 - a_2 L_3)^3 + \frac{1}{6} L_1^3 L_2 L_3 [a_2^2 (3a_1 - \lambda_2 a_2) L_2^2 - a_3^2 (3a_1 - \mu_3 a_3) L_3^2] + \\
 & + \frac{1}{6} L_1^3 L_2^2 L_3 [5(a_3^3 - a_3^3) + 4a_2 a_3 (a_1 - a_2) + (\lambda_2 a_3^3 - \mu_3 a_3^3)] - \\
 & - \frac{1}{6} L_1^2 L_3^3 L_3 [4a_3^3 + 5a_2^3 + a_2 a_3 (5a_3 + a_2) + (\mu_3 a_3^3 + \lambda_2 a_2^3)] + \\
 & + \frac{1}{6} L_1^2 L_2^2 L_3 [4a_2^3 + 5a_3^3 + a_2 a_3 (5a_2 + a_3) + (\mu_3 a_3^3 + \lambda_2 a_2^3)]
 \end{aligned}$$

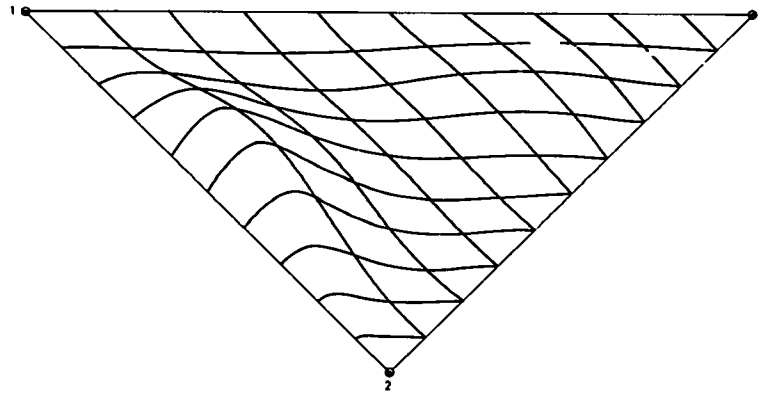
Fig. 24. Función de forma asociada al grado de libertad $U_7 = (\omega_{xx})_1$



$$\begin{aligned}
 N_9 = & \frac{1}{2} L_1^4 [a_3^2 b_2 L_3^3 - \gamma L_2 L_3^2 + \delta L_2^2 L_3 - a_3^2 b_3 L_2^2] + \\
 & + \frac{1}{2} L_1^3 L_2 L_3 [(3 + \lambda_2) a_3^2 b_2 + \gamma] L_2^2 - [(3 + \mu_3) a_3^2 b_3 + \delta] L_3^2 + \\
 & + \frac{1}{6} L_1^3 L_2^2 L_3 [15(a_3^2 b_1 - a_2^2 b_2) + 4(\gamma - \delta) + 3(\mu_3 a_3^2 b_3 - \lambda_2 a_2^2 b_2)] + \\
 & + \frac{1}{6} L_1^2 L_3^3 L_3 [15a_3^2 b_2 + 12a_3^2 b_3 + 5\delta + \gamma + \mu_3 a_3^2 b_3 + \lambda_2 a_2^2 b_2] - \\
 & - \frac{1}{6} L_1^2 L_2^2 L_3 [15a_3^2 b_3 + 12a_2^2 b_2 + 5\gamma + \delta + \mu_3 a_3^2 b_3 + \lambda_2 a_2^2 b_2]
 \end{aligned}$$

con $\delta = a_3(2a_2 b_3 + a_3 b_2)$, $\gamma = a_2(2a_3 b_2 + a_2 b_3)$

Fig. 25. Función de forma asociada al grado de libertad $U_9 = (\omega_{xy})_1$



$$N_{11} = 64h_3 \left[L_1^3 L_2^3 L_3 + L_1^2 L_2^2 L_3^2 (L_3 - L_2 - L_1) \right]$$

Fig. 26. Función de forma asociada al grado de libertad $U_{31} = (\omega_n)_4$

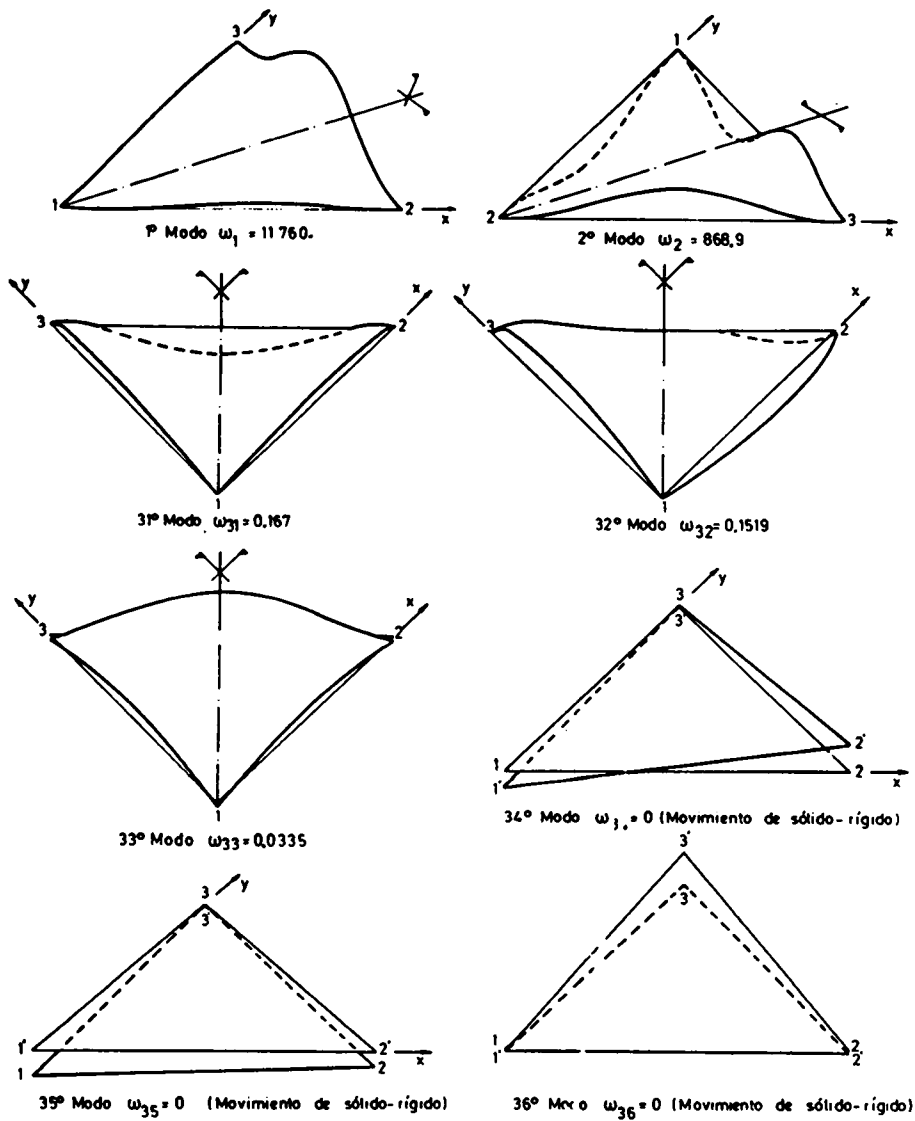
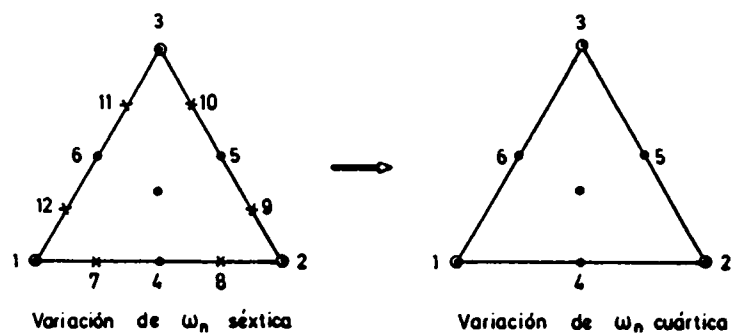


Fig. 27. Vectores propios de la matriz de rigidez del Hiper elemento tipo II.



- ⊙ $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{xx}, \omega_{yy}, \omega_{xy}$
- $\omega, \omega_x, \omega_y$
- x ω_n

Fig. 28.

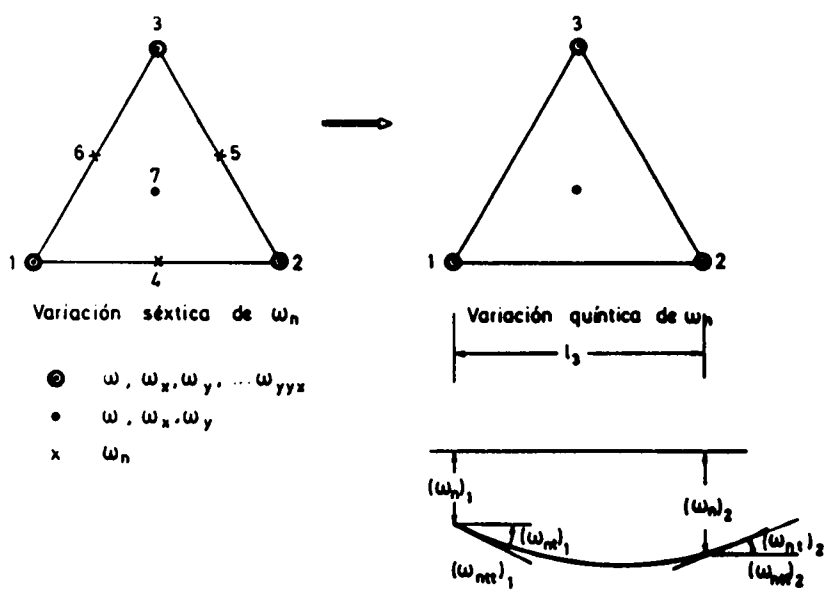


Fig. 29.

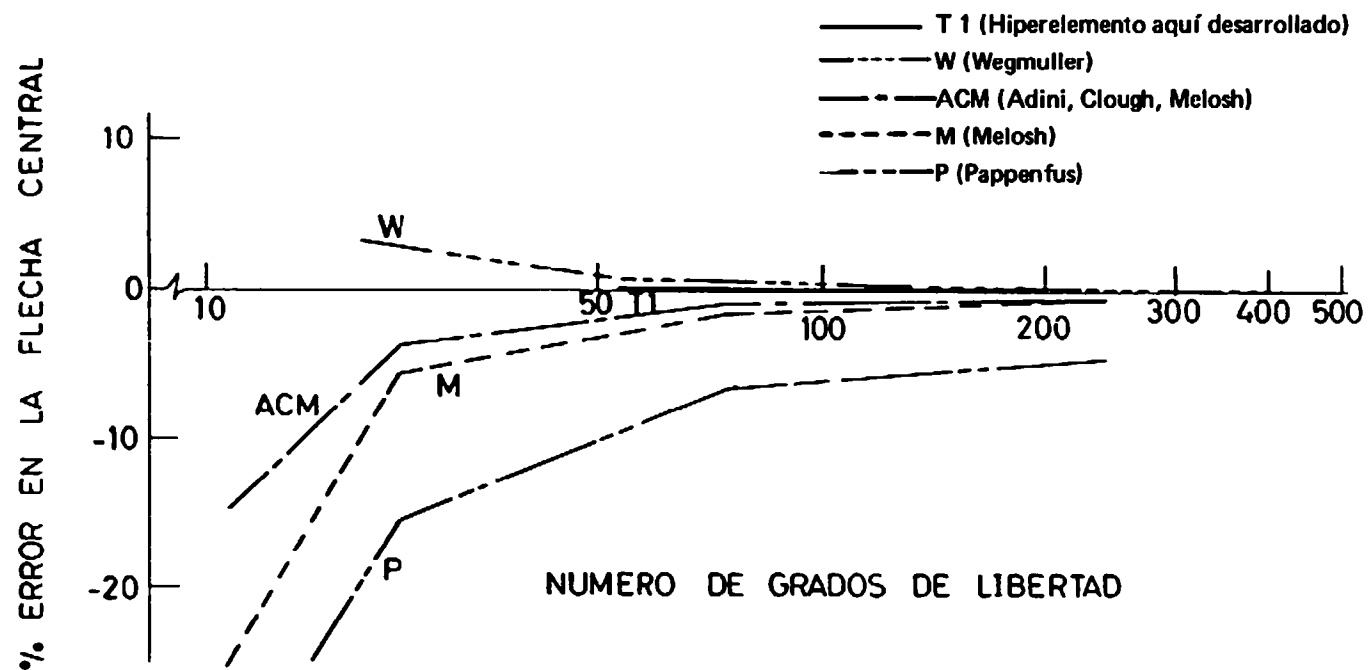


Fig. 31. Porcentaje de Error en la Flecha Central en función del N° de Grados de Libertad para el caso de Placa cuadrada simplemente apoyada y sometida a carga uniforme.

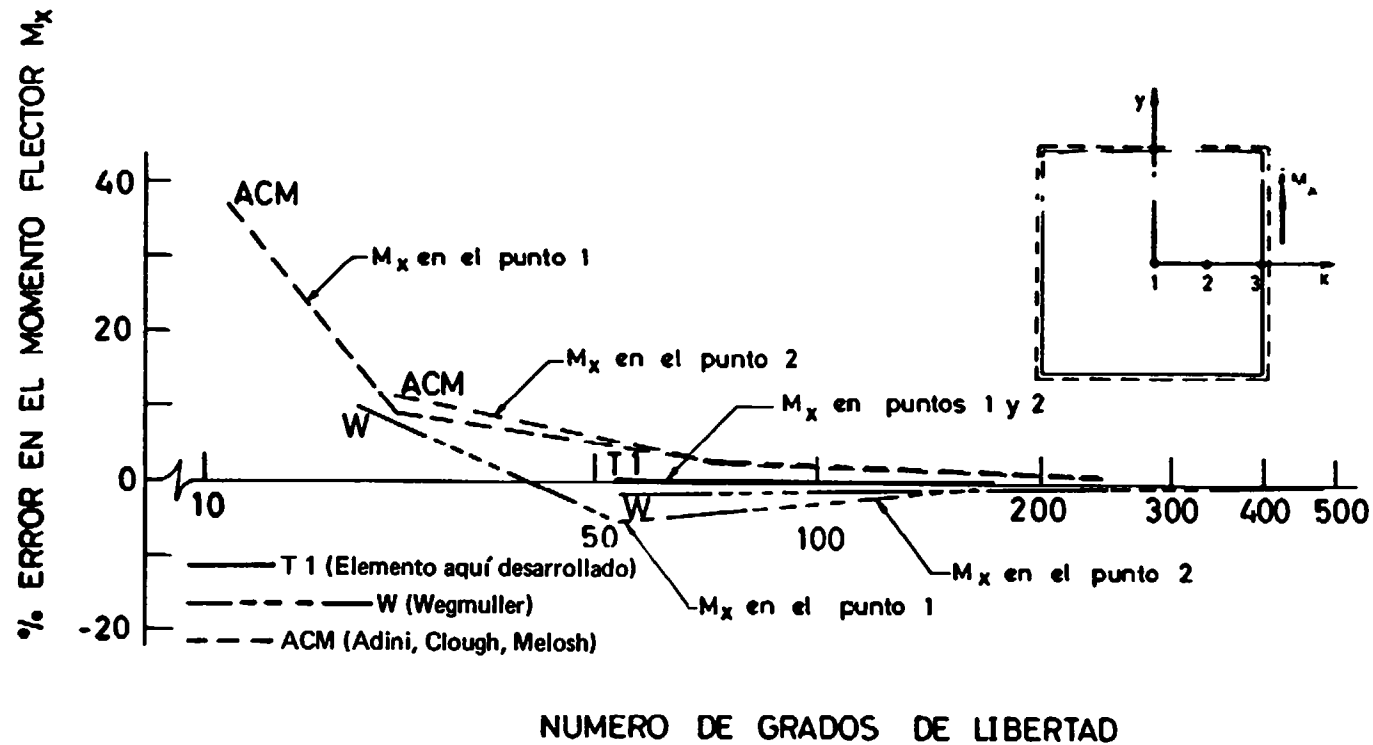


Fig. 32. Porcentaje de Error en el Momento flector M_x en función del número de Grados de Libertad para el caso de Placa cuadrada simplemente apoyada y sometida a carga uniforme.

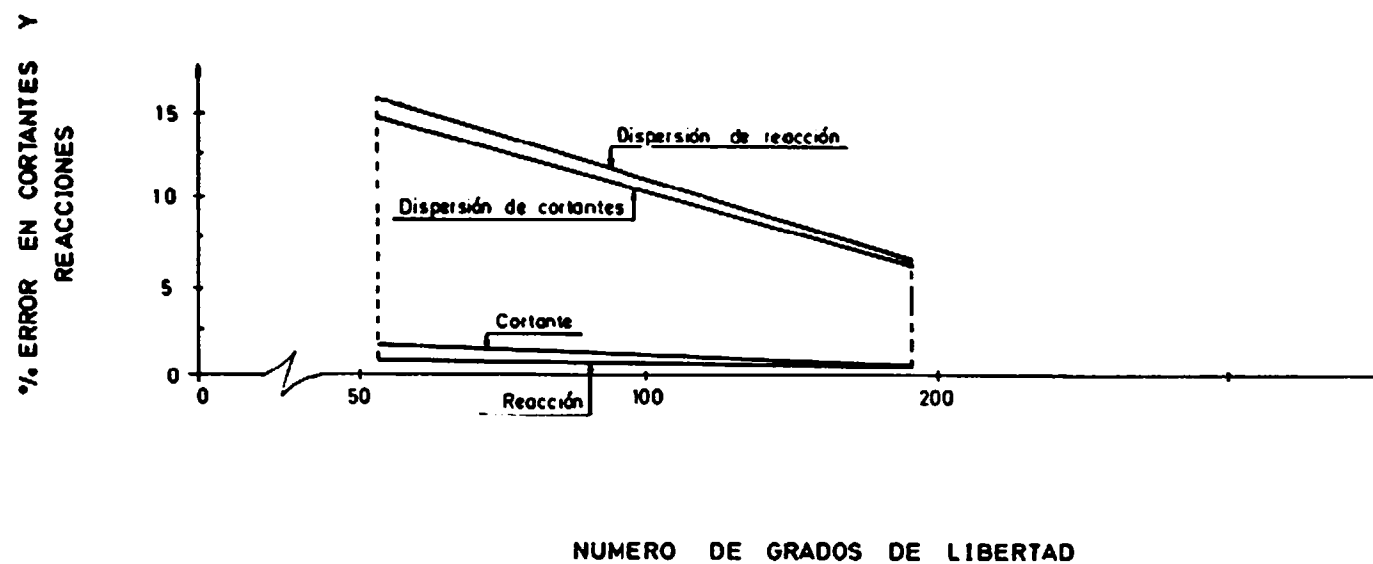


Fig. 33. Porcentaje de Error en los cortantes y reacciones en el punto medio del lado de una placa cuadrada apoyada sometida a carga uniforme. Se indican además las dispersiones.